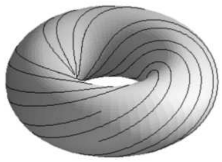
JOURNÉES DE GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE



Marrakech du 19 au 23 mai 2008

http://www.ggtm.uh2c.ma/Activites.htm

Organisées par

GGTM
Cité des Géométries de Maubeuge
Équipe GTA de la FST de Marrakech

Ces journées ont pu se faire grâce au soutien financier substantiel de La Cité des Géométries de Maubeuge, la ville de Maubeuge, la Communauté d'Agglomération de Maubeuge et du Val de Sambre (AMVS). Nous leur exprimons nos remerciements les plus sincères.

Responsables de l'organisation : A. Abouqateb, A. El Kacimi

Contact : aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

CONFÉRENCES

N. Gamara (Faculté des Sciences de Tunis) : ngamara7@gmail.com
Sur la résolution de la conjecture de Yamabe sur les variétés CR

– Mardi 20 mai de 11 h 45 à 12 h 45

O. Hijazi (Université de Nancy) : Oussama.Hijazi@iecn.u-nancy.fr
Introduction à l'opérateur de Dirac

– Vendredi 23 mai de 10 h 45 à 11 h 45

D. Lehmann (Université de Montpellier II) : lehm.dan@orange.fr
Introduction à la théorie des résidus

– Voir programme de l'École du CIMPA

K. Melnick (Yale University, USA) : Karin.Melnick@yale.edu
Sur la rigidité des automorphismes de structures géométriques

– Jeudi 22 mai de 11 h 45 à 12 h 45

F. Recher (Université de Lille I) : Francois.Recher@math.univ-lille1.fr
Introduction élémentaire à la cryptographie

– Mercredi 21 mai de 09 h 00 à 10 h 00

V. Sergiescu (Université de Grenoble I) : Vlad.Sergiescu@ujf-grenoble.fr
Sur le multiplicateur de Shur du groupe de Thompson T

– Lundi 19 mai de 10 h 45 à 11 h 45

V. Vassallo (Université de Lille I) : Valerio.Vassallo@math.univ-lille1.fr
Entre arts et mathématiques il n'y a qu'une bulle de savon !

– Mercredi 21 mai de 10 h 45 à 11 h 45

Résumés des conférences

Sur la résolution de la conjecture de Yamabe sur les variétés CR

Najoua Gamara

Rappelons d'abord ce qu'est le *Problème de Yamabe* : Soit (M, θ) une variété de Cauchy-Riemann réelle orientable compacte de dimension $2n+1$, munie d'une forme de contact θ. Notons par $L = L_\theta = (2 + \frac{2}{n})\Delta_b + R_\theta$ le laplacien conforme CR sur M, où Δ_b est l'opérateur sous-laplacien et R_θ la courbure scalaire de Webster associée à θ. La conjecture de Yamabe dit qu'*il existe une forme de contact $\tilde{\theta}$ sur M, CR-conforme à θ, de courbure scalaire de Webster $R_{\tilde{\theta}}$ constante.* Ce problème est équivalent à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu = u^{1+\frac{2}{n}} \\ u > 0 \text{ sur } M. \end{cases} \qquad \text{Problème de Yamabe } CR$$

D. Jerison et J. M. Lee prouvent la conjecture de Yamabe pour les variétés CR non localement conformément CR-équivalentes à la sphère. En plus de la preuve de T. Aubin et R. Schoen de la conjecture de Yamabe dans le cas riemannien, une autre preuve de A. Bahri, A. Bahri-H. Brézis de la même conjecture a été établie. Elle est basée sur l'utilisation des techniques relatives à la théorie des points critiques à l'infini. Cette preuve est différente par la démarche ainsi que les techniques de la preuve donnée par T. Aubin et R. Schoen, elle ne néssécite pas l'utilisation des surfaces minimales, ni le théorème de la masse positive. On peut alors adapter ces méthodes au cas CR. Les deux cas laissés ouverts par D. Jerison et J. M. Lee ont fait l'objet des deux résultats suivants :

Théorème 1. *Soit (M,θ) une variété CR réelle compacte orientable de dimension $2n+1$, localement CR-équivalente à $\mathbb{S}^{2n+1}$. Alors le problème (P) admet une solution.*

Théorème 2. *Soit (M, θ) une variété CR-compacte de dimension 3, non localement conformément CR-équivalente à la sphère $\mathbb{S}^3$. Alors le problème (P) admet une solution.*

Sur Introduction à l'opérateur de Dirac

Oussama Hijazi

Le but de cet exposé est d'arriver assez rapidement à définir l'opérateur de Dirac comme racine carrée du Laplacien et d'illustrer son rôle en Physique Mathématique, Géométrie et Topologie.

Il correspond, en dimension 2, à l'opérateur de Cauchy-Riemann et sur les formes différentielles, à l'opérateur de Hodge.

Sur une variété riemannienne on met en évidence le rôle de la courbure scalaire et de la géométrie conforme dans l'étude de l'opérateur de Dirac.

Introduction à la théorie des résidus

Daniel Lehmann

Avant un "théorème de résidus", il y a d'abord un "théorème d'annulation" de la forme : *pour qu'un certain "objet" O puisse exister sur un espace X (supposé compact pour simplifier), il faut que telle ou telle classe caractéristique $\varphi(E)$ dun certain fibré E de base X s'annule".* [Par contraposition, on peut aussi paraphraser ce résultat sous forme d'un "théorème d'obstruction" en énonçant que *la non-nullité de $\varphi(E)$ est une obstruction à l'existence de O*]. Si un tel objet O est maintenant donné sur $X \setminus \Sigma$, en dehors d'un ensemble singulier Σ fermé dans X, les classes $\varphi(E)$ ne sont alors plus nécéssairement nulles, mais vont se "localiser" près de Σ, donnant lieu à un "résidu" $\mathrm{Res}_\Sigma(\alpha, E, O)$ appartenant à l'homologie de Σ et ne dépendant que de la restriction de O à un voisinage arbitrairement petit de Σ dans X. Lorsque X admet une classe fondamentale $[X]$ (par exemple lorsque X est une variété orientable compacte), le "théorème des résidus" exprime que l'image de ce résidu dans l'homologie de X par l'application naturelle $H_*(\Sigma) \longrightarrow H_*(X)$ est la duale de Poincaré de $\varphi(E)$. Plus précisément, si l'on note $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ la famille des composantes connexes de Σ, $\mathrm{Res}_{\Sigma_\alpha}(\alpha, E, O)$ la composante de $\mathrm{Res}_\Sigma(\alpha, E, O)$ sur $H_*(\Sigma_\alpha)$ et ι_α l'inclusion naturelle $\Sigma_\alpha \subset X$, on obtient :

$$\varphi(E) \frown [X] = \sum_\alpha (\iota_\alpha)_* \mathrm{Res}_{\Sigma_\alpha}(\alpha, E, O).$$

En général, la difficulté est moins de démontrer l'existence d'un résidu que de le calculer. D'autres problèmes peuvent également apparaître, comme par exemple le fait que dans certains cas le fibré E ne soit a priori défini qu'au-dessus de $X \setminus \Sigma$ (ce qui suffit en général pour définir le résidu) : la question se pose alors de donner un sens à $\varphi(E) \frown [X]$, en prolongeant de façon naturelle le fibré E (ou sa classe stable en K-théorie quand il s'agit d'un fibré vectoriel) à tout X. Nous donnerons différents exemples des situations rencontrées, en commençant par deux cas prototypes : le théorème de Cauchy et le théorème de Poincaré-Hopf.

Sur la rigidité des automorphismes de structures géométriques

Karin MELNICK

Étant donnée une variété M munie d'une structure géométrique, deux questions se posent naturellement : quels groupes de Lie H peuvent agir sur M tout en préservant la structure géométrique ? Quelles propriétés de H impliquent que M soit homogène ou localement homogène ? Je présenterai deux fils de recherche qui s'attelent sur ces deux questions, y compris des travaux récents de moi-même avec Charles Frances et Uri Bader dans le cadre des géométries de Cartan.

Une géométrie de Cartan modèle infinitésimalement une variété sur un espace homogène G/P. Je donnerai la définition de géométrie de Cartan, et discuterai plusieurs exemples de structures géométriques qui correspondent aux géométries de Cartan canoniques, y compris des métriques riemanniennes ou pseudo-riemanniennes et structures conformes.

Quelques restrictions sur les groupes d'automorphismes d'une géométrie de Cartan modelée sur G/P sont des bornes sur le rang réel ou le degré de nilpotence, determinées par le couple (G, P). Pour quelques classes de géométries de Cartan sur une variété M, si le rang réel ou le degré de nilpotence maximal est atteint par un groupe d'automorphismes, alors M est localement homogène localement équivalente comme géométrie de Cartan à G/P.

Si le temps le permet, je mentionnerai quelques questions ouvertes portant sur les structures géométriques.

Quelques notions de cryptographie modulo quelques notions d'arithmétique

François RECHER

La volonté de protéger des informations, des communications a toujours existé et poussé les hommes à inventer de nouvelles techniques. Initialement souci majeur des militaires (plan d'engins guerriers, plan de bataille,...), il est devenu ces 30 dernières années une préoccupation (plus ou moins lointaine) du grand public (carte bancaire, téléphone portable, internet,...)

Très peu de personnes sont conscientes des investissements faits en matière de sécurité dans les objets qu'ils manipulent au quotidien. Que dire alors du nombre de personnes qui en connaissent quelques fondements mathématiques ?

Nous tenterons dans cet exposé de décrire à grands traits quelques étapes de l'évolution de la cryptographie à travers les siècles avec comme fil conducteur deux notions mathématiques fondamentales et accessibles que sont la division euclidienne et la structure de groupe.

Nous aborderons les systèmes de chiffrement de César, de Vigenère, RSA, celui basé sur les courbes elliptiques, en présentant pour chacun d'eux les problématiques mathématiques et informatiques (pour les plus récents) nouvelles mises en oeuvre pour leur conception.

Sur le multiplicateur de Shur du groupe de Thompson T

Vlad Sergiescu

Le multiplicateur de Schur est le deuxième groupe d'homologie, ou de cohomologie d'un groupe. Après avoir précisé ces notions, nous regarderons le cas des groupes de Thompson où son calcul est difficile et intéressant. Nous finirons par quelques applications récentes.

Entre arts et mathématiques il n'y a qu'une bulle de savon !

Valerio Vassallo

Grâce à une histoire inventée, en suivant le parcours imaginaire d'une bulle de savon, je parcourerai l'exposition en passant par la peinture, la littérarture, l'architecture, la biologie, la phyique, la chimie et les mathématiques, en espérant que la bulle n'éclate pas avant le dernier panneau...

Il étais une fois...

– A travers le questionnement de Martin, un enfant curieux, issu d'une histoire imaginée à l'occasion de la presentation de l'exposition "Boules et Bulles" à la Faculté d'Architecture de Rome en Janvier 2008, nous serons amenés à chercher les mathématiques là où on ne les attend peut-être pas...

– Pourquoi les nids d'abeilles ont-ils une forme héxagonale ?

– Quel mathématicien a pu s'intéresser aux alvéoles des abeilles ?

– Y a-t-il une relation entre ces alvéoles et les pavages du plan en polygones réguliers ?

– Pourquoi les bulles de savon sont-elles rondes ?

– C'est quoi ces bulles qui ont tant intrigué les peintres flamands pour qu'elles finissent dans leurs tableaux ?

– Certains architectes comme Frei Otto ont passé du temps à plonger de maquettes fabriquées en fil de fer dans l'eau savonneuse : pourquoi ?

– Quelle géométrie se cache "derrière" les films de savon ?

– Pourquoi dans le cas de certaines formes on parle de surfaces minimales ?

– Que vient "faire" dans un triangle le physicien Torricelli inventeur du thermomètre ?

– Et la reine Didon dans l'inégalité isoperimétrique ?

– Et le mathématicien Gauss dans le développement des cartes géographiques ou Euler dans le ballon de foot ?

– Quelle est la relation entre les rampes de skate-board et les toits des maisons en Chine, l'empilement des oranges et l'informatique, la structure des poumons et les fractals, la poésie et les mathématiques ?

Toutes ces questions intriguent Martin ! Heureusement que notre petit héros a toute une vie pour réflechir et avoir quelques éléments de réponses !

RENSEIGNEMENTS UTILES

CLUB DE L'UNIVERSITÉ CADI AYYAD
Al Badiî (Amerchiche)
(En face de la RADEEMA Noujoum)
Téléphone : 00 212 24 31 05 65 ou 66

Hôtel Riad Omar
22, rue Bab Agnaou - Médina
Tél. : 00 212 24 44 56 60
http://www.riadomar.com

Quelques numéros de téléphone en cas de besoin

ABCHIR Hamid (Casablanca) : 061 28 73 67
ABOUQATEB Abdelhak (Marrakech) : 072 05 90 15

Taux de change

Un euro vaut au moins 11,40 dirhams

Quelques tarifs des transports

Entre l'Aéroport de Casablanca et le Centre Ville, le train coûte 36 dirhams. La course en taxi entre l'Aéroport de Marrakech et le Club de l'Université coûte entre 50 dirhams et 100 dirhams. À l'intérieur de Marrakech même, le tarif de la course varie entre 10 dirhams et 50 dirhams (trajet moyen).

Pour avoir les horaires des trains consulter la page Web :

http://www.oncf.ma/