ECOLE CIMPA

Marrakech (Maroc), Mai 2008

GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE, GÉOMÉTRIE
PSEUDO-RIEMANNIENNE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM COMME EXEMPLE D'INVARIANT TOPOLOGIQUE

par

AZIZ EL KACIMI

(Université de Valenciennes)

aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr

Le contenu de ce texte n'a rien d'original et rien de nouveau. Son niveau, délibérément élémentaire, est motivé par le souhait d'introduire très sommairement le lecteur non spécialiste aux idées de la théorie de de Rham-Hodge d'une variété riemannienne compacte. Il est clair que c'est dans le cadre de cette théorie qu'on trouve, sans aucun doute, l'un des liens les plus étroits entre la topologie et l'analyse.

QUESTION NATURELLE :
comment reconnaître que deux espaces sont homéomorphes ?
Ou au moins, quand peut-on dire qu'ils ne le sont pas ?
Des réponses existent ! Elles utilisent des invariants topologiques.
Dans le cas des variétés différentiables l'un d'eux s'introduit à l'aide des formes différentielles :

LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM !
UN INVARIANT DE NATURE ALGÉBRIQUE QUI PERMET DE DIRE DES CHOSES SUR LA TOPOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ !

Avant-propos

Un des buts des mathématiques est la classification des objets dont elles font usage. C'est un problème difficile qui reste largement ouvert à l'heure actuelle. À défaut de le résoudre individuellement pour chaque objet, on peut se contenter de le faire à *isomorphisme près***. Cette notion dépend bien sûr de la catégorie dans laquelle on se situe. Un objet mathématique est un ensemble M supportant une ou plusieurs structures : c'est un espace topologique, un espace métrique, un espace mesurable, un groupe, un anneau, un espace vectoriel, un groupe topologique** *etc.* **Pour deux ensembles M et N sans structures supplémentaires, la notion d'équivalence consiste simplement à demander à M et N d'avoir le même "nombre d'éléments" ou, de façon plus pécise, qu'il existe une bijection $f : M \longrightarrow N$; on dit alors que M et N sont** *équipotents***. Que se passe-t-il si en plus M et N supportent des structures respectives $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_N$ (topologiques, algébriques ou autres) ? D'abord**

il faut que M et N soient équivalents au sens esembliste *i.e.* il existe une bijection $f : M \longrightarrow N$; ensuite il faut que $\mathcal{S}_M$ et $\mathcal{S}_N$ soient de même nature et que f et f^{-1} “respectent” ces structures. Si une telle application f existe, on dira que les deux objets mathématiques $(M, \mathcal{S}_M)$ et $(N, \mathcal{S}_N)$ sont *isomorphes* ; l'application $f : M \longrightarrow N$ est alors un *isomorphisme* (ou *isomorphie*) : elle transporte tout ce qui se passe dans $(M, \mathcal{S}_M)$ vers $(N, \mathcal{S}_N)$ et f^{-1} fait la même chose dans l'autre sens. Ceci permet de travailler indifféremment sur $(M, \mathcal{S}_M)$ ou $(N, \mathcal{S}_N)$: suivant la nature du problème on se mettra dans l'un ou dans l'autre. On comprend donc à quel point il est important de chercher à établir un isomorphisme entre deux objets mathématiques !

Nous examinerons ce problème dans la catégorie topologique. Deux espaces topologiques M et N sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme $\varphi : M \longrightarrow N$. Par exemple dans le cas où M et N sont des ouverts de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, un homéomorphisme peut s'interpréter comme un changement global de coordonnées : toute personne fréquentant un peu les mathématiques a eu recours à ce type de procédé pour calculer une intégrale, résoudre une équation différentielle *etc.* Le problème de l'homéomorphie s'avère donc être d'un intérêt incontestable mais en général difficile à résoudre. Une manière de l'aborder consiste à chercher des *invariants* dans une catégorie où le calcul est possible ; par exemple la *catégorie algébrique* : cela consiste à associer à chaque espace M un groupe, un anneau ou un espace vectoriel *etc.* qu'on notera $\pi(M)$ et qui sera tel que : $\pi(M)$ est isomorphe à $\pi(N)$ si M est homéomorphe à N. Nous dirons que $\pi(M)$ est un *invariant topologique* de M. Dans ce texte nous nous restreignons à des espaces topologiques particuliers pour simplifier l'exposé et le travail. Sur de tels espaces on peut dériver : ce sont les *variétés différentiables*. Sur une variété différentiable M on peut définir un exemple d'invariant topologique à l'aide des formes différentielles et l'opérateur de différentiation extérieure. C'est une suite d'espaces vectoriels $\{H^r(M)\}_{r\geq 0}$ naturellement associée à M et appelée *cohomologie de de Rham* de M sur laquelle elle donne des renseignements topologiques. Son calcul n'est pas toujours immédiat mais plus la structure géométrique de M est fine plus on a d'outils pour le faire. Par exemple, si M est compacte, l'usage d'une *métrique riemannienne* permet de calculer $\{H^r(M)\}_{r\geq 0}$ par des formes différentielles plus jolies appelées *formes harmoniques*. Elles sont "peu nombreuses" (elles forment un espace vectoriel de dimension finie) et "sont déjà" la cohomologie de de Rham (c'est le *théorème de Hodge*) : toute classe de cohomologie contient une forme harmonique et une seule. La démonstration de ce théorème (bien qu'elle fasse actuellement partie du folklore) est hautement non triviale. Nous nous contenterons de définir le cadre dans lequel il se situe et en exposer les points essentiels avec quelques exemples.

1. Préliminaires

On se donne un espace topologique séparé M.

1.1. <u>Définition</u>. *On dira que M est une* **variété topologique** *de dimension $n \in \mathbf{N}$ si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbf{R^n}$* i.e. *il existe une application bijective $\varphi : \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{U}$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Un point x de U est repéré par les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R^n}$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* **de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée** *carte locale* **et $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$ seront les** *coordonnées* **de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide alors un point $x \in U \cap V$ sera repéré par ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans U et ses coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans V. Comme le diagramme :**

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \| \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif on doit avoir :

$$(1) \qquad (x'_1, \ldots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ **est appelée** *changement de coordonnées* **de la carte** (U, φ) **à la carte** (V, ψ)**. On appelle** *atlas* **définissant** M **la donnée d'un recouvrement ouvert** $\{U_i\}_{i \in I}$ **et, pour chaque** $i \in I$**, d'un homéomorphisme** $\varphi_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow U_i$ **; un tel objet sera toujours noté** $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$**. La régularité de la structure se lira sur celle de l'homéomorphisme** $\psi^{-1} \circ \varphi$**. Désormais** M **sera une variété topologique de dimension** n**.**

1.2. Définition. *On dira que* M *est une* **variété différentiable** *si l'homéomorphisme* $\psi^{-1} \circ \varphi$ *est de classe* C^∞*.*

Tout ouvert non vide d'une variété différentiable de dimension n **est une variété différentiable de dimension** n**.**

Une variété différentiable (avec $r \geq 1$**)** M **est dite** *orientable* **si les difféomorphismes (1) préservent l'orientation de** $\mathbf{R}^n$ *i.e.* **pour tout point** $x \in U_i \cap U_j$**, le déter-**

minant de la différentielle de $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ au point $(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une variété différentiable est dite *compacte, connexe, etc.* si l'espace topologique sou-jacent est compact, connexe *etc.*

Dans toute la suite de ce paragraphe on ne considérera que les variétés de classe C^∞ connexes.

1.3. Exemples

Ils sont abondants. Le premier à citer est bien sûr l'espace euclidien R^n lui-même puisqu'il constitue le modèle local.

(1.3.1) - Soient k et ℓ deux entiers naturels et U un ouvert de R^k. Une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathrm{R}^\ell$ est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_xf : \mathrm{R}^k \longrightarrow \mathrm{R}^\ell$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x. On dira que f est une *immersion* si, en tout point x de M, d_xf est injective ; dans ce cas $k \leq \ell$. On dira que f est une *submersion* si, pour tout $x \in M$, d_xf est surjective ; dans ce cas $k \geq \ell$. Supposons

$k = n + q$, $\ell = q$ et, pour tout $c \in f(U)$, posons :

$$M = \{x \in U : f(x) = c\}.$$

Si f est une submersion on montre, en utilisant le *théorème des fonctions implicites*, que M est une variété différentiable de dimension n. On dira que f est une *fonction definissant* M.

Beaucoup de variétés sont obtenues de cette manière ; par exemple la sphère dans R^{n+1} :

$$\mathbf{S}^{n+1} = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}.$$

On appelle *sous-variété de dimension* n de R^k toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $f : U \longrightarrow \mathrm{R}^q$ définissant $M \cap U$.

Toute variété différentiable M *de dimension* n *peut être considérée comme sous-variété différentiable de* R^k *pour* k *suffisamment grand* (c'est le théorème de Whitney dont on peut trouver une démonstration dans [Rha]).

(1.3.2) - Soit $n \geq 1$ un entier. Sur $\mathbf{K}^{n+1} - \{0\}$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) on considère la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbf{K} \text{ non nul tel que } y = \lambda x.$$

L'ensemble quotient $P^n(\mathbf{K}) = (\mathbf{K}^{n+1} - \{0\})/\sim$ est appelé *espace projectif* (réel si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et complexe si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) de dimension (réelle ou complexe) n. On peut montrer (c'est facile mais un peu long) que $P^n(\mathbf{K})$ est une variété différentiable compacte connexe de dimension n si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $2n$ si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Indiquons rapidement comment on pourrait construire un atlas définissant la structure de variété sur $P^n(\mathbf{K})$.

Par définition $P^n(\mathbf{K})$ est l'ensemble $\{D\}$ des droites D passant par l'origine. Soit $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ et notons H_i l'hyperplan de $\mathbf{K}^{n+1}$ d'équation $x_i = 1$. Alors toute droite $D \in P^n(\mathbf{K})$ non parallèle à H_i peut être repérée par son point d'intersection P avec H_i qui a pour coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_i, \ldots, \xi_n)$; ce point est bien entendu déterminé par sa projection P' de co-

ordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$ sur le sous-espace horizontal $H_i' = \mathbf{K}^n$ d'équation $x_i = 0$.

L'ensemble des droites D qui rencontrent H_i sera noté U_i. On définit l'application $\varphi_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbf{K}^n$ par

$$\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n).$$

On peut calculer les coordonnées :

$$\varphi_i^{-1}(D) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_n)$$

en fonction de celles d'un point $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de D ; elles sont données par

$$\xi_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \xi_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

On a donc un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i=1,\ldots,n+1}$. (La vérification de la compatibilité différentiable entre deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) (avec $i \neq j$) est laissée au lecteur.)

(1.3.3)- Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et q. Alors le produit cartésien $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $n + q$. De manière générale le produit cartésien d'un nombre fini de variétés différentiables est une variété différentiable de dimension la somme des dimensions. Par exemple le produit de n exemplaires du cercle S^1 est une variété de dimension n appelée *n-tore réel* $\mathrm{T}^n = \mathrm{S}^1 \times \ldots \times \mathrm{S}^1$. Le tore T^n possède en plus une structure de groupe et c'est une variété sur laquelle on peut mener beaucoup de calculs de manière plus aisée que sur d'autres.

(1.3.4) - Un *groupe de Lie* est un groupe G qui possède en même temps une structure de variété pour laquelle l'application $(g, g') \in G \times G \longmapsto g(g')^{-1} \in G$ est différentiable. Les espaces vectoriels R^n et C^n, leurs groupes linéaires respectifs **GL**(n, R) et **GL**(n, C), les groupes affines de R^n et de C^n, les tores T^n, les groupes orthogonaux **O**(n), **U**(n), les groupes orthogonaux spéciaux **SO**(n) et **SU**(n) sont des groupes de Lie. Il y en a tant d'autres !

1.4. Applications différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives n et p. On dira qu'une applica-

tion continue $f : M \longrightarrow N$ est *différentiable* au point $x \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant x et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbf{R}^p$$

est différentiable. On dira que f est différentiable si elle est différentiable en tout point de M.

En particulier on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction :

$$f \circ \varphi : \mathbf{R}^n \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)).$$

1.5. Fibré tangent

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, on a l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U associe la fonction

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U$, les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$$

sont linérairement indépendants. Si (V, ψ) est une autre carte locale de système de coordonnées $(x_1', \cdots, x_n')$ dans $U \cap V$ on a $(x_1', \cdots, x_n') = \psi^{-1} \circ \varphi$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, \cdots, n$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_\ell'}{\partial x_k}(x) \frac{\partial}{\partial x_\ell'}(x).$$

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ engendrent donc un espace vectoriel réel de dimension n indépendant de la carte choisie (U, φ).

On appelle *espace tangent* à M au point x, l'espace T_xM engendré par $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U, φ). Un élément de T_xM est appelé *vecteur tangent* à M en x. On pose :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

On montre que TM est une variété différentiable de dimension $2n$. Un élément de TM est un couple (x, u)

où x est un point de M et u un vecteur tangent à M en x. L'application $\pi : (x,u) \in TM \longmapsto x \in M$ est différentiable. On dira que $\pi : TM \longrightarrow M$ est le *fibré tangent* à M.

On appelle *section* de TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application différentiable $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$; X associe à chaque point $x \in M$ un vecteur $X(x)$ tangent à M en x de façon à ce que la variation de $X(x)$ (en fonction de x) soit différentiable. L'ensemble $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M.

Si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté Diff(M). Un difféomorphisme $f : M \longrightarrow N$ transporte un champ de vecteurs X sur M en un champ $f_*(X)$ sur

N : $f_*(X)(y) = d_x f(X(x))$ où $x \in M$ est tel que $y = f(x)$ et $d_x f$ est la différentielle de f en x. Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in$ Diff(M) ; on dira que X est *invariant* par f si $f_*(X) = X$.

Si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N. Dans ce cas les variétés M et N ont nécessairement la même dimension. L'ensemble des difféomorphismes d'une variété sur elle-même est un groupe (pour la composition des applications) noté Diff(M). Un difféomorphisme $f : M \longrightarrow N$ transporte un champ de vecteurs X sur M en un champ $f_*(X)$ sur N : $f_*(X)(y) = d_x f(X(x))$ où $x \in M$ est tel que $y = f(x)$ et $d_x f$ est la différentielle de f en x. Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in$ Diff(M) ; on dira que X est *invariant* par f si $f_*(X) = X$.

2. Cohomologie de de Rham

Soit M une variété différentiable définie à l'aide d'un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de M et $\varphi_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow U_i$ un difféomorphisme.

2.1. Les formes différentielles

Nous allons d'abord les introduire en supposant que M est un ouvert de R^n. Soit r un entier naturel et notons $\Lambda^r\mathrm{R}^n$ l'espace des r-formes extérieures sur R^n. On appelle *forme différentielle de degré* r ou simplement r-*forme* sur M toute application :

$$\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r\mathbf{R}^n$$

de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, α_x est une r-forme linéaire alternée sur R^n. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est donc un espace vectoriel réel ; il sera noté $\Omega^r(M)$. On voit que $\Omega^r(M) = \{0\}$ si $r > n$; on pose $\Omega^r(M) = \{0\}$ pour $r < 0$. Toute r-forme α s'écrit dans les coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ sous la forme :

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1\ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}. \tag{2}$$

où les $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$ sont des fonctions différentiables. Soient M et N deux ouverts respectivement de R^n et R^p et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors, pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace R^n dans l'espace R^p. Pour tout $r \in \mathrm{N}$, elle induit une application linéaire :

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N comme suit : pour tout point $x \in M$ et tout système de vecteurs $(u_1, \ldots, u_r)$ de R^n on pose :

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, \ldots, u_r) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), \ldots, d_x\varphi(u_r)).$$

On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de R^n mais une variété quelconque définie comme on l'a dit par l'atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert U_i (qui est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$) telle que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$, on ait la condition de recollement $\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j)$. L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas où M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ se transportent systématiquement au cas où M est une variété. On pose :

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega^r(M).$$

Deux formes différentielles $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$ s'écrivant :

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \text{ et } \beta = \sum \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

ont pour produit extérieur :

$$\alpha \wedge \beta = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} \beta_{j_1 \ldots j_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

où la somme est étendue à tous les r-uplets $(i_1, \ldots, i_r)$ et s-uplets $(j_1, \ldots, j_s)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n$. On obtient ainsi une forme différentielle de degré $r + s$ sur M. On a bien sûr

$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ **et** $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$. **L'espace** $\Omega^*(M)$ **est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative*. Le produit extérieur d'une r-forme et d'une fonction est une r-forme différentielle. Chaque espace vectoriel $\Omega^r(M)$ admet donc une structure de *module* sur l'anneau des fonctions C^∞ sur M (qui n'est rien d'autre que $\Omega^0(M)$).**

Dorénavant, on conviendra toujours que l'écriture dans une carte locale $(U, x_1, \ldots, x_n)$ d'une r-forme α sur M est celle donnée par l'expression (2).

Si M et N sont deux variétés et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable, on définit de la même façon que pour les ouverts des espaces euclidiens, l'application image réciproque $\varphi^* : \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(M)$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

(2.1.1) - Si $M = N$ et φ est l'identité alors φ^* est l'identité de $\Omega^r(M)$ pour tout entier r. Si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2.1.2) - Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et

$\Omega^*(M)$ **et on a** $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$**.**

2.2. La différentielle extérieure

A toute r**-forme** $\alpha = (\alpha_i)$ **on associe la** $(r+1)$**-forme** $d\alpha$ **définie (localement) par la formule :**

$$(d\alpha)_i = \sum \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_k} dx_i \right) dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

On définit ainsi, pour tout r**, un opérateur linéaire** $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$. **appelé** ***différentielle extérieure*** **sur** M**. Pour** $\alpha \in \Omega^r(M)$ **et** $\beta \in \Omega^s(M)$ **on a :**

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta \tag{3}$$

i.e. d **est une** ***dérivation*** **sur l'algèbre** $\Omega^*(M)$**. D'autre part, pour tout** $r \in \mathbb{N}$**, l'opérateur composé** $d^2 = d \circ d : \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+2}(M)$ **est nul.**

La différentielle d **commute à** φ^* **pour toute application différentiable** $\varphi : M \longrightarrow N$ ***i.e.*** **pour tout** $r \in \mathbb{N}$ **le diagramme qui suit est commutatif :**

$$\begin{array}{ccc} \Omega^r(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(N) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Omega^r(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{r+1}(M). \end{array}$$

On dira que la r-forme α est *fermée* (ou un *cocycle*) si $d\alpha = 0$, *exacte* (ou un *cobord*) s'il existe $\beta \in \Omega^{r-1}(M)$, appelée *primitive* de α, telle que $\alpha = d\beta$. On pose :

$$Z^r(M) = \{r\text{-}\textbf{formes fermées sur } M\}$$

et

$$B^r(M) = \{r\text{-}\textbf{formes exactes sur } M\}.$$

2.3. La cohomologie

D'après ce qu'on vient de voir, à toute variété M on peut associer une suite d'espaces vectoriels et d'opérateurs linéaires :

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

(où les première et dernière flèches sont bien sûr les applications nulles). On l'appelle *complexe de de Rham* de M. Comme $d^2 = 0$ on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $B^r(M) \subset Z^r(M)$. On dira alors que la suite (4) est *semi-exacte*. Le défaut d'exactitude est mesuré par le quotient :

$$(5) \qquad H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

qu'on appelle $r^{\text{ème}}$ *espace de cohomologie de de Rham* de M. Deux r-formes fermées α et β sont dites *cohomologues* si elles définissent la même classe de cohomologie *i.e.* s'il existe une $(r-1)$-forme γ telle que $\alpha - \beta = d\gamma$. L'espace vectoriel $H^r(M)$ est réduit à $\{0\}$ si, et seulement si, l'équation différentielle $\alpha = d\beta$ admet une solution pour toute r-forme fermée α. Ainsi, du point de vue de l'analyse, la cohomologie s'interprète comme une *obstruction* (on verra qu'elle sera topologique ou plus généralement *homotopique*) à l'existence de solutions de telles équations. Il est donc intéressant de chercher à comprendre cet objet. Voyons d'abord comment il se tranforme par une application différentiable.

On sait que le produit extérieur de deux formes différentielles induit sur $\Omega^*(M)$ une structure multiplicative vérifiant $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$ pour $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$. Ceci montre clairement que $\alpha \wedge \beta$ est fermée si α et β le sont et que le produit extérieur induit un produit au niveau de la cohomolo-

gie $[\alpha]\wedge[\beta]=[\alpha\wedge\beta]$ **pour toutes formes fermées** α **et** β**; ici** $[\omega]$ **désigne la classe de cohomologie de la forme fermée** ω**. Ainsi la cohomologie** $H^*(M)$ **d'une variété** M **est munie d'une strucure d'algèbre.**

2.4. Quelques propriétés

Soient M **et** N **deux variétés et** $\varphi : M \longrightarrow N$ **une application** C^∞**. Alors** φ **induit, pour tout** $r \in \mathrm{N}$**, une application linéaire** $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ **commutant à** d**. Il en résulte que** φ^* **transforme une forme fermée en forme fermée et forme exacte en forme exacte** ***i.e.*****:**

$$\varphi^*(Z^r(N)) \subset Z^r(M) \text{ et } \varphi^*(B^r(N)) \subset B^r(M).$$

Elle définit donc une application linéaire au niveau des espaces vectoriels de cohomologie :

$$\varphi^* : H^r(N) = Z^r(N)/B^r(N) \longrightarrow H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M).$$

Soient maintenant M**,** N **et** L **des variétés et** $M \xrightarrow{\varphi} N$**,** $N \xrightarrow{\psi} L$ **deux applications** C^∞**. Comme au niveau des** r**-formes on a** $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$**, le morphisme** $(\psi\circ\varphi)^* : H^r(L) \longrightarrow H^r(M)$ **n'est rien d'autre que le composé de :**

$$\psi^* : H^r(L) \longrightarrow H^r(N) \text{ et } \varphi^* : H^r(N) \longrightarrow H^r(M).$$

D'autre part, il est immédiat que φ^* est l'identité de $H^r(M)$ si φ est l'identité de M. Il en résulte que si $M \xrightarrow{\varphi} N$ est un difféomorphisme alors $\varphi^* : H^r(N) \longrightarrow H^r(M)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels d'inverse $(\varphi^{-1})^*$. Plus : φ^* est un isomorphisme d'algèbres entre $H^*(M)$ et $H^*(N)$. Ceci montre déjà une certaine invariance de l'objet $H^*(M)$.

En réalité la cohomologie est un invariant d'une propriété plus faible que l'équivalence différentiable. Nous allons en dire un mot de façon très condensée.

(2.4.1) - Soient M et N deux variétés et $M \overset{\varphi,\psi}{\longrightarrow} N$ deux applications continues. On dira que φ et ψ sont *homotopes* s'il existe une application continue :

$$H : M \times \mathbf{R} \longrightarrow N$$

(appelée *homotopie* entre φ et ψ) telle que :

$$H(x,t) = \begin{cases} \varphi(x) & \textbf{pour } t \leq 0 \\ \psi(x) & \textbf{pour } t \geq 1 \end{cases}$$

Si en plus H est différentiable, on dira que φ et ψ sont *différentiablement homotopes* ; dans ce cas on

démontre que les morphismes $\varphi^*, \psi^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(N)$ sont égaux.

(2.4.2) - Une application continue $\varphi : M \longrightarrow N$ (non différentiable) n'induit pas a priori d'application linéaire en cohomologie : on a besoin de prendre les images réciproques des formes différentielles et cela doit utiliser la dérivée de φ dont on ne dispose pas! Toutefois une telle application est toujours homotope à une application $\widehat{\varphi} : M \longrightarrow N$ différentiable (*cf.* [God]); le morphisme $\varphi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$ sera celui induit par $\widehat{\varphi}$ par le résultat suivant dont on peut trouver une démonstration dans [God] et qui traduit explicitement l'*invariance topologique* de chacun des espaces $H^*(M)$:

***Soient M et N deux variétés homéomorphes. Alors il existe une application $M \xrightarrow{\psi} N$, C^∞ induisant un isomorphisme d'algèbres* :**

$$\psi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M).$$

(2.4.3) - ***Deux applications $\varphi, \psi : M \longrightarrow N$ continues homotopes induisent les mêmes morphismes***

d'algèbres en cohomologie :

$$\varphi^*, \psi^* : H^*(N) \longrightarrow H^*(M)$$

(2.4.4) - Deux variétés M et N ont même *type d'homotopie* s'il existe des applications continues $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow M$ telles que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ soient homotopes respectivement à id_M et id_N ; on dira que ψ (resp. φ) est un *inverse homotopique* de φ (resp. de ψ) . Si $N \subset M$, on dira que N est un *rétracte par déformation* de M s'il existe une application continue $r : M \longrightarrow N$ telle que r soit l'identité sur N et $r \circ j$ et $j \circ r$ soient homotopes respectivement aux applications id_N et id_M (j étant l'inclusion de N dans M). Les variétés M et N ont donc même type d'homotopie. Si M se rétracte par déformation sur un point on dira que M est *contractile*.

Deux variétés qui ont même type d'homotopie ont des algèbres de cohomologie isomorphes.

2.5. <u>Exemples de calcul</u>

Il y a diverses méthodes pour calculer la cohomologie d'une variété. Quelquefois on peut le faire à

la main de façon directe mais, en général, le calcul n'est pas du tout immédiat. On a toutefois quelques recettes. Par exemple une manière de le faire serait de découper la variété en morceaux (ouverts) dont on peut déterminer la cohomologie de façon plus simple et ensuite essayer de "recoller la situation" ; c'est le but du *théorème de Mayer-Vietoris*. On peut aussi décomposer (quand cela est possible) la variété en produit cartésien de deux autres variétés ; la connaissance de la cohomologie de chacun des facteurs donne alors celle du produit ; c'est la *formule de Künneth*.

(2.5.1) - ***Le degré*** $\underline{0}$

On suppose M connexe. Alors l'espace vectoriel $H^0(M)$ est toujours isomorphe à $\mathbb{R}$ engendré par la fonction constante égale à 1. En effet une 0-forme fermée est une fonction constante qui n'admet aucune primitive si elle n'est pas nulle (puisque les formes de "degré négatif" sont toutes nulles !).

(2.5.2) - ***La cohomologie du point***

Supposons M réduite à un point $*$. L'algèbre des formes différentielles sera donc :

$$\Omega^r(*) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0 \\ 0 & \textbf{si } r \geq 1 \end{cases}$$

munie de la différentielle nulle. Le seul espace de cohomologie non nul du point est donc $H^0(*)$ (qui est bien sûr isomorphe à $\mathbf{R}$).

Supposons $M = \mathbf{R}^n$. Alors M a le type d'homotopie du point $\{0\}$. En effet l'application $H : \mathbf{R} \times M \longrightarrow M$ définie par $H(t, x) = \rho(t)x$ où :

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } t < 0 \\ 1 - t & \textbf{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textbf{si } t > 1 \end{cases}$$

est une homotopie entre l'identité de M et l'application constante qui à tout $x \in M$ associe 0. Donc la cohomologie de $\mathbf{R}^n$ est celle du point. Comme tout espace normé $(E, || \ ||)$ est homéomorphe à toute boule ouverte $B(x_0, \varepsilon) \subset E$ par l'application $x \in E \longmapsto \frac{\varepsilon x}{1+||x||} + x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$, si $E = \mathbf{R}^n$ est muni de l'une quelconque de ses normes, on a :

$$H^r(B(x_0, \varepsilon)) = H^r(\mathbf{R}^n) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0 \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

(2.5.3) - *Mayer-Vietoris*

On appelle *complexe différentiel* toute suite d'espaces vectoriels $\mathcal{E} = (E_r)_{r\in\mathbf{N}}$ (sur un corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et d'applications linéaires $d_r : E_r \longrightarrow E_{r+1}$ telles que $d_{r+1} \circ d_r = 0$. On écrit :

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{r-1}} E_r \xrightarrow{d_r} E_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} \ldots$$

On a alors pour tout $r \in \mathbf{N}^*$:

$$B^r(\mathcal{E}) = \mathbf{Im} d_{r-1} = \{d_{r-1}(x) : x \in E_{r-1}\}$$

qui est contenu dans :

$$Z^r(\mathcal{E}) = \mathbf{Ker} d_r = \{x \in E_r : d_r x = 0\}.$$

Un élément de $Z^r(\mathcal{E})$ est appelé r-*cocycle* ; un élément de $B^r(\mathcal{E})$ est appelé r-*cobord*. Le quotient :

$$H^r(\mathcal{E}) = Z^r(\mathcal{E})/B^r(\mathcal{E})$$

est appelé $r$ème *espace vectoriel de cohomologie* du complexe $\mathcal{E}$.

Soient $\mathcal{E} = (E_r, d_r)$ et $\mathcal{F} = (F_r, \delta_r)$ deux complexes différentiels ; on appelle *morphisme* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ la

donnée, pour chaque $r \in \mathbf{N}$, d'une application linéaire $\varphi : E_r \longrightarrow F_r$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{d_{n-1}} & E_n & \xrightarrow{d_n} & E_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & \dots \\
 & & \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & F_n & \xrightarrow{\delta_n} & F_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \dots
\end{array}$$

Il est clair qu'un tel morphisme envoie les cocycles et les cobords de $\mathcal{E}$ respectivement dans les cocycles et les cobords de $\mathcal{F}$; il induit donc un morphisme en cohomologie *i.e.* pour chaque $r \in \mathbf{N}$, on a une application linéaire $\varphi_r^* : H^r\mathcal{E}) \longrightarrow H^r(\mathcal{F})$. On dira que $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un *quasi-isomorphisme* si, pour tout r, φ_r^* est un isomorphisme ; c'est le cas si tout φ_r est un isomorphisme.

Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}$ deux morphismes de complexes. On vérifie facilement que $(\psi_r^* \circ \varphi_r)^* = \psi_r^* \circ \varphi_r^*$.

Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ un morphisme ; le noyau et l'image de φ sont respectivement les suites d'espaces Kerφ_r et Imφ_r pour $r \in \mathbf{N}$.

A toute suite exacte de complexes différentiels $0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$ est associée une suite exacte longue de cohomologie :

$$\ldots \longrightarrow H^r(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma_r^*} H^{r+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow \ldots$$

γ_r^* est appelé *homomorphisme de connection*.

Soient maintenant U_1 et U_2 deux ouverts d'une variété M tels que $M = U_1 \cup U_2$. Alors on a une suite exacte :

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\varphi} \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \xrightarrow{\psi} \Omega^*(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

où $\varphi(\omega) = (\omega_{|U_1}, \omega_{|U_2})$ et $\psi(\alpha, \beta) = \alpha_{|U_1 \cap U_2} - \beta_{|U_1 \cap U_2}$. Seule la surjectivité de ψ n'est pas immédiate. Pour l'établir soit (ρ_1, ρ_2) une partition de l'unité différentiable subordonnée à (U_1, U_2). Pour toute forme $\theta \in \Omega^*(U_1 \cap U_2)$ on pose $\alpha = \rho_2 \theta$ et $\beta = -\rho_1 \theta$. On vérifie alors facilement que sur $U_1 \cap U_2$ on a $\psi(\alpha, \beta) = \theta$, ce qui montre bien que ψ est surjective. Le théorème de Mayer-Vietoris dit alors que cette suite induit une suite exacte longue de cohomologie :

$$\ldots \longrightarrow H^r(M) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(U_1) \oplus H^r(U_2) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\gamma_r^*}$$

$$H^{r+1}(M) \xrightarrow{\varphi_{r+1}^*} H^{r+1}(U_1) \oplus H^{r+1}(U_2) \xrightarrow{\psi_{r+1}^*} H^{r+1}(U_1 \cap U_2) \ldots.$$

Ici l'homomorphisme de connection γ_r^* est défini par :

$$\gamma_r^*([\theta]) = \begin{cases} [d(\rho_2\theta)] & \textbf{sur } U_1 \\ [-d(\rho_1\theta)] & \textbf{sur } U_2. \end{cases}$$

Nous utiliserons cette suite exacte pour le calcul effectif de la cohomologie de certaines variétés.

(2.5.4) - *Formule de Künneth*

Soient M et N deux variétés. Alors l'algèbre de cohomologie $H^*(M \times N)$ de $M \times N$ est le produit tensoriel des algèbres $H^*(M)$ et $H^*(N)$ ***i.e.*** pour tout $r \in \mathbf{N}$ on a :

$$H^r(M \times N) = \bigoplus_{p+q=r} H^p(M) \otimes H^q(N).$$

(2.5.5) - *Cohomologie de* $M = \mathbf{R}^2 - \{0\}$

Nous ferons le calcul à la main. À cet effet il est nécessaire de connaître l'expression exacte des formes différentielles sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. Elles s'écrivent, en coordonnées polaires (mieux adaptées au problème) :

$$h(\rho,\theta), \quad \alpha = a(\rho,\theta)d\rho + b(\rho,\theta)d\theta \quad \textbf{et} \quad \beta = c(\rho,\theta)d\rho \wedge d\theta$$

où h, a, b et c sont des fonctions C^∞ périodiques de période 2π en θ. La forme β est fermée (pour des

raisons évidentes de degré) ; pour les autres leurs différentielles s'écrivent :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \quad \textbf{et} \quad \left(\frac{\partial b}{\partial \rho} - \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) d\rho \wedge d\theta.$$

La 1**-forme** $\alpha = a(\rho,\theta)d\rho + b(\rho,\theta)d\theta$ **est fermée si, et seulement si,** $\frac{\partial b}{\partial \rho} = \frac{\partial a}{\partial \theta}$. **Supposons cette condition satisfaite ;** α **sera exacte s'il existe une fonction** h**,** C^∞**, périodique de période** 2π **en** θ **et telle que** $\frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta = a d\rho + b d\theta$. **On est donc amené à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant :**

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \rho} = a \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} = b. \end{cases}$$

La résolution formelle donne :

$$h(\rho,\theta) = \int_0^\theta b(\rho,u)du + \int_1^\rho a(\xi,0)d\xi + \textbf{constante}.$$

Il est clair que la fonction h **ainsi définie est** C^∞**. Pour qu'elle donne une primitive de** β **sur** M **elle doit être en plus périodique de période** 2π **en la variable** θ**. L'égalité** $h(\rho,\theta + 2\pi) = h(\rho,\theta)$ **équivaut à** $\int_0^{2\pi} b(\rho,\theta)d\theta = 0$. **Une forme fermée** $\alpha = a(\rho,\theta)d\rho + b(\rho,\theta)d\theta$ **dont le coefficient** b **vérifie**

cette condition est donc exacte. On montre facilement (utilisant la fermeture de α) que la fonction $\rho \longmapsto \int_0^{2\pi} b(\rho,\theta)d\theta$ ne dépend pas de ρ. Ceci nous permet de définir une forme linéaire $Z^1(M) \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} \mathrm{R}$ dont la valeur sur la 1-forme $\alpha = a(\rho,\theta)d\rho + b(\rho,\theta)d\theta$ est $\Phi(\alpha) = \int_0^{2\pi} b(\rho,\theta)d\theta$. Alors Ker $\Phi = B^1(M)$. Par suite l'espace $B^1(M)$ est $Z^1(M)$ tout entier si Φ est nulle ; dans le cas contraire il en est un hyperplan. On lève l'indétermination en constatant que la 1-forme :

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{2\pi(x^2+y^2)}$$

qui s'écrit en coordonnées polaires $\omega_0 = d\theta$ est fermée et vérifie $\Phi(\omega_0) = 1$. Par suite l'espace vectoriel $H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M)$ est de dimension 1 engendré par la classe de cohomologie de la forme ω_0.

Un calcul similaire permet de montrer que $H^2(M) = \{0\}$. Pour des raisons de degré (qu'on a déjà évoquées) $H^r(M) = \{0\}$ pour $r \geq 3$.

(2.5.6) - ***Cohomologie de $M = \mathrm{R}^2 - 2$ points***

On note $z_1 = (x_1, y_1)$ et $z_2 = (x_2, y_2)$ les deux points dont on prive R^2. Sur le segment $[z_1 z_2]$ on choisit deux

points A et B tels que $z_1A = AB = Bz_2$. Par A (resp. par B) on mène une perpendiculaire Δ_2 (resp. Δ_1) au segment $[z_1z_2]$; Δ_1 (resp. Δ_2) partage le plan en deux demi-plans ouverts ; soit U_1 (resp. U_2) celui contenant z_1 (resp. z_2). Alors $\{U_1, U_2\}$ est un recouvrement ouvert de M et l'intersection $U_1 \cap U_2$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$ donc sa cohomologie est celle d'un point. Le théorème de Mayer-Vietoris appliqué à ce recouvrement donne une suite exacte longue de cohomologie :

$$\ldots \longrightarrow H^r(M) \xrightarrow{\varphi_r^*} H^r(U_1) \oplus H^r(U_2) \xrightarrow{\psi_r^*} H^r(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\gamma_r^*}$$

$$H^{r+1}(M) \xrightarrow{\varphi_{r+1}^*} H^{r+1}(U_1) \oplus H^{r+1}(U_2) \xrightarrow{\psi_{r+1}^*} H^{r+1}(U_1 \cap U_2) \ldots.$$

Comme on connait la cohomologie de U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$, l'examen de cette suite donne :

$$H^r(M) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0 \\ \mathbf{R}^2 & \textbf{si } r = 1 \\ 0 & \textbf{si } r \geq 2. \end{cases}$$

Le $H^1(M)$ est engendré par les classes de cohomologie des deux 1-formes fermées :

$$\omega_1 = \frac{(x - x_1)dy - (y - y_1)dx}{2\pi((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)}$$

et :

$$\omega_2 = \frac{(x-x_2)dy-(y-y_2)dx}{2\pi((x-x_2)^2+(y-y_2)^2)}.$$

Par le même type de raisonnement on montre que la cohomologie de la variété M obtenue en privant R^2 de n points $z_i=(x_i,y_i)$ (avec $i=1,\ldots,n$) est :

$$H^r(M) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r=0 \\ \mathbf{R}^n & \textbf{si } r=1 \\ 0 & \textbf{si } r\geq 2 \end{cases}$$

et le $H^1(M)$ est engendré par les classes de cohomologie des 1-formes fermées :

$$\omega_i = \frac{(x-x_i)dy-(y-y_i)dx}{2\pi((x-x_i)^2+(y-y_i)^2)} \quad \textbf{avec} \quad i=1,\ldots,n.$$

Ceci montre que deux variétés M et N obtenues en privant R^2 respetivement de k points et de ℓ points ne sont pas homéomorphes si $k\neq\ell$.

(2.5.7) - <u>*Cohomologie de la sphère* S^n</u>

Le cas $n=1$ est couvert par le calcul de l'exemple (2.5.5). En effet le cercle S^1 a le type d'homotopie de $M=\mathbf{R}^2-\{0\}$. Donc :

$$H^r(\mathbf{S}^1) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r=0,1 \\ 0 & \textbf{si } r\geq 2. \end{cases}$$

Si $n = 2$, on considère le recouvrement ouvert $\{U_1, U_2\}$ de la sphère $\mathbf{S}^2$ où U_1 est $\mathbf{S}^2$ privée du pôle sud et U_2 est $\mathbf{S}^2$ privée du pôle nord. Chacun des ouverts U_1 et U_2 est difféomorphe à $\mathbf{R}^2$ et $U_1 \cap U_2$ est difféomorphe au cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ qui a le type d'homotopie du cercle $\mathbf{S}^1$. Le théorème de Mayer-Vietoris appliqué à ce recouvrement permet de calculer la cohomologie de la sphère $\mathbf{S}^2$:

$$H^r(\mathbf{S}^2) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0, 2 \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

La même démarche donne :

$$H^r(\mathbf{S}^n) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0, n \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

(2.5.8) - ***Et quand un groupe agit ?***

Soit G un groupe de Lie compact. On appelle *action* de G sur M une application différentiable $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ telle que : i) $\Phi(e, x) = x$ pour tout $x \in M$ (e est l'élément neutre de G) ; ii) pour tous $g, g' \in G$ et tout $x \in M$ on a $\Phi(gg', x) = \Phi(g, \Phi(g', x))$. Ainsi, si on fixe $g \in G$, l'application $\Phi(g, \cdot) : x \in M \longmapsto gx = \Phi(g, x) \in M$ est un difféomorphisme (qu'on notera simplement g).

L'*orbite* d'un point $x \in M$ est l'ensemble $\mathcal{O}_x = \{gx : g \in G\}$; le *groupe d'isotropie* d'un point $x \in M$ est le sous-groupe $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. L'ensemble des orbites est noté M/G ; muni de la topologie quotient, c'est un espace séparé. On dira que l'action Φ est *triviale* si $\mathcal{O}_x = \{x\}$ pour tout x ; on dira que l'action Φ est *libre* si $G_x = \{e\}$ pour tout x et dans ce cas l'espace quotient est une variété différentiable de dimension = dim$M$ - dim$G$. Une forme différentielle α est dite *invariante* si, pour tout $g \in G$, $g^*(\alpha) = \alpha$. Les formes invariantes constituent un sous-complexe différentiel $(\Omega^*_G(M), d)$ du complexe de Rham de M ; sa cohomologie sera notée $H^*_G(M)$. Soit μ une *mesure de Haar* normalisée sur G; on montre alors que l'application linéaire (appelée *moyennisation*) :

$$\alpha \in \Omega^*(M) \longmapsto \int_G g^*(\alpha) d\mu(g) \in \Omega^*_G(M)$$

induit une injection de $H^*_G(M)$ dans $H^*(M)$. Si en plus G est connexe, tout difféomorphisme g est homotope à l'identité et donc les algèbres $H^*(M)$ et $H^*_G(M)$ sont en fait isomorphes. Ceci permet de calculer la coho-

mologie à l'aide de formes plus particulières. Nous en verrons tout de suite quelques exemples.

(2.5.9) - *Cohomologie de* $P^n(\mathbf{R})$

Rappelons que $P^n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$; on peut aussi le construire de la façon suivante : on fait agir le groupe multiplicatif $G = \{1, -1\}$ sur la sphère $\mathbf{S}^n$ (de $\mathbf{R}^{n+1}$) en associant à l'élément -1 le difféomorphisme γ qui à x associe $-x$ (c'est l'application *antipodale*). Cette action est libre et l'espace quotient est exactement $P^n(\mathbf{R})$. La variété $P^n(\mathbf{R})$ est orientable si, et seulement si, γ préserve l'orientation de $\mathbf{R}^{n+1}$ *i.e.* n est impair. D'autre part, le complexe de de Rham de $P^n(\mathbf{R})$ est exactement le complexe $\Omega^*_G(\mathbf{S}^n)$. Ainsi $H^*(P^n(\mathbf{R}))$ s'injecte dans $H^*(\mathbf{S}^n)$. Donc :

$$H^r(P^n(\mathbf{R})) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } r = 0 \\ \mathbf{R} & \text{si } r = n \text{ et } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } r = n \text{ et } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(En degré n, la distinction entre le cas pair et le cas impair vient du fait que l'action de γ sur $H^n(M)$ est triviale si, et seulement si, n est impair.)

(2.5.10) - *Cohomologie de $P^n(\mathbf{C})$*

On peut construire l'espace $P^n(\mathbf{C})$ comme suit : on regarde la sphère $\mathbf{S}^{2n+1}$ comme l'ensemble :

$$\{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Sur cette sphère on fait agir le groupe de Lie compact connexe $G = \{e^{2i\pi\theta} : \theta \in \mathbf{R}\}$ des nombres complexes de module 1 par l'application :

$$(e^{2i\pi\theta}, z) \in G \times \mathbf{S}^{n+1} \longmapsto e^{2i\pi\theta} z \in \mathbf{S}^{n+1}.$$

Cette action est libre et ses orbites sont des cercles ; l'espace quotient n'est rien d'autre que l'espace projectif $P^n(\mathbf{C})$; c'est une variété différentiable connexe compacte de dimension $2n$ et orientable. L'objet :

$$G \hookrightarrow \mathbf{S}^{2n+1} \xrightarrow{\pi} P^n(\mathbf{C})$$

est appelé *fibré principal* : le groupe de Lie compact connexe G agit librement sur la variété $\mathbf{S}^{2n+1}$ et l'espace des orbites est $P^n(\mathbf{C})$. Sur $\mathbf{S}^{2n+1}$ il existe un champ de vecteurs X et une 1-forme différentielle ω

tous les deux invariants sous l'action de G et tels que $\omega(X) = 1$. À toute r-forme sur $\mathbf{S}^{2n+1}$ on associe la $(r-1)$-forme $i_X\alpha$ définie par $i_X\alpha(X_1, \cdots, X_{r-1}) = \alpha(X, X_1, \cdots, X_{r-1})$. L'opérateur i_X est appelé *produit intérieur* par le champ X. Une forme différentielle α sur $\mathbf{S}^{2n+1}$ est dite *basique* si elle vérifie $i_X\alpha = 0$ et est invariante sous l'action de G. Il est facile de voir que si α est basique, il en est de même pour $d\alpha$; ainsi les formes basiques constituent un complexe différentiel $\Omega_b^*(\mathbf{S}^{2n+1})$ qui s'identifie, via l'application $\pi^* : \Omega^*(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow \Omega^*(\mathbf{S}^{2n+1})$, au complexe $(\Omega^*(P^n(\mathbf{C})), d)$. On a donc un isomorphisme canonique entre les algèbres de cohomologie $H_b^*(\mathbf{S}^{2n+1})$ et $H^*(P^n(\mathbf{C}))$. Pour toute r-forme invariante α, la forme $i_X\alpha$ est basique. La suite de complexes différentiels :

$$(7) \qquad 0 \longrightarrow \Omega_b^*(\mathbf{S}^{2n+1}) \hookrightarrow \Omega_G^*(\mathbf{S}^{2n+1}) \xrightarrow{i_X} \Omega_b^{*-1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, par définition même d'une forme basique, le noyau de i_X n'est rien d'autre que l'espace $\Omega_b^*(\mathbf{S}^{2n+1})$; d'autre part, l'opérateur i_X est surjectif : pour toute forme $\beta \in \Omega_b^{*-1}(\mathbf{S}^{2n+1})$, $\omega\wedge\beta$ est dans $\Omega_G^*(\mathbf{S}^{2n+1})$

et vérifie $i_X(\omega\wedge\beta)=\beta$. La suite exacte longue de cohomologie associée (à la suite exacte courte (S')) s'écrit:

$$0 \longrightarrow H_b^0(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_G^0(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_b^1(\mathbf{S}^{2n+1})$$

$$\longrightarrow H_G^1(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_b^0(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_b^r(\mathbf{S}^{2n+1})$$

$$\longrightarrow H_G^r(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_b^{r-1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_b^{r+1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow H_b^{2n+1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_G^{2n+1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H_b^{2n}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow 0.$$

Comme $H_b^*(\mathbf{S}^{2n+1}) = H^*(P^n(\mathbf{C}))$ et $H_G^*(\mathbf{S}^{2n+1}) = H^*(\mathbf{S}^{2n+1})$ cette suite s'écrit de façon plus explicite :

$$0 \longrightarrow H^0(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow H^0(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow$$

$$H^1(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^0(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^r(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow$$

$$H^r(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^{r-1}(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow H^{r+1}(P^n(\mathbf{C})) \cdots$$

$$\longrightarrow H^{2n+1}(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow H^{2n+1}(\mathbf{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^{2n}(P^n(\mathbf{C})) \longrightarrow 0.$$

Finalement utilisant cette suite exacte et le fait que :

$$H^r(\mathbf{S}^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 0, 2n+1 \\ 0 & \textbf{sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$H^r(P^n(\mathbf{C})) = \begin{cases} \mathbf{R} & \textbf{si } r = 2\ell \textbf{ avec } \ell = 0, 1, \cdots, n \\ 0 & \textbf{sinon.} \end{cases}$$

3. Le théorème de Hodge

Soit M une variété de dimension n (pour simplifier, on la supposera connexe et orientable). On notera $\Omega^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur M et :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

le complexe de de Rham associé. Soit $r \in \{0, 1, \cdots, n\}$; notons $Z^r(M)$ l'espace des r-formes fermées, $B^r(M)$ celui des formes exactes et $H^r(M)$ le $r^{\text{ème}}$ espace de cohomologie. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow B^r(M) \hookrightarrow Z^r(M) \xrightarrow{\tau} H^r(M) \longrightarrow 0.$$

Problème. ***Existe-t-il une section :***

$$H^r(M) \xrightarrow{P} Z^r(M)$$

pour l'application $Z^r(M) \xrightarrow{\tau} H^r(M)$ naturelle relativement à une certaine géométrie de M ?

Si une telle section existait, elle serait injective et donnerait un sous-espace de $Z^r(M)$ qui reprsenterait $H^r(M)$. La réponse est positive (c'est la théorie de

Hodge) mais à condition de raffiner la structure en rajoutant une métrique riemannienne sur M ; cet objet ne coûte rien : toute variété en supporte.

3.1. Intégration d'une n-forme

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de R^n ; la mesure de Lebesgue $\lambda = dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n$ sur R^n induit une mesure μ sur $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{O}'$ un autre ouvert de R^n et $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un difféomorphisme de classe C^1 et $\mu' = \varphi_*(\mu)$ la mesure image de μ par φ.

Une fonction mesurable $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathrm{R}$ est μ'-intégrable si, et seulement si, $f \circ \varphi$ est μ-intégrable. En plus on a :

$$\int_{\mathcal{O}'} f d\mu' = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi |J(\varphi)| d\mu$$

où $J(\varphi)$ est le déterminant jacobien de φ.

Soit maintenant ω une n-forme différentielle à support compact sur R^n ; ω s'écrit $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. On définit alors l'intégrale de ω sur R^n comme étant le nombre :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega = \int_{\mathbf{R}^n} f dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n.$$

On vérifie facilement que si $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ **est un difféomorphisme alors :**

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi^* \omega = \textbf{(signe de } J(\varphi)\textbf{)} \int_{\mathbf{R}^n} \omega.$$

Ceci étant, nous allons préciser quand et comment on peut *intégrer* **sur une variété** M**. Supposons qu'elle est définie par un atlas** $\mathcal{U} = \{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ **où** U_i **est un recouvrement (localement fini de** M**). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :**

(i) M ***est orientable ;***

(ii) Les déterminants jacobiens de tous les difféomorphismes de changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ ***sont positifs ;***

(iii) Il existe sur M ***une forme différentielle*** v ***de degré*** n ***partout non nulle ;*** v ***est appelée*** **forme volume** ***sur*** M***.***

Supposons M **orientée par la donnée d'une** n**-forme volume** v**. Soit** $\{\rho_i\}_{i\in I}$ **une partition de l'unité différentiable subordonnée au recouvrement** $\mathcal{U}$**. Alors pour toute** n**-forme différentielle** ω**, la** n**-forme** $\rho_i\omega$ **est à sup-**

port dans U_i et on a $\omega = \sum_{i\in I} \rho_i\omega$. Le nombre :

$$\sum_{i\in I} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_i^*(\rho_i\omega)$$

(quand il existe bien sûr) ***ne dépend ni du choix de l'atlas*** $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ ***ni de la partition de l'unité*** $\{\rho_i\}$**. On l'appelle** ***intégrale de*** ω ***sur*** M **et on le note $\int_M \omega$. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité évidentes:**

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau \qquad \textbf{et} \qquad \int_M \lambda\omega = \lambda \int_M \omega \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

3.2. Structure riemannienne

Soit M une variété différentiable définie par un atlas $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel de dimension n. Soit S^2T_xM l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur T_xM ***i.e.*** **les applications $\varphi : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que :**

i) les applications partielles $\varphi(u, \cdot) : v \longrightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \longrightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires ;

ii) pour tous u, $v \in T_xM$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

L'ensemble S^2T_xM est un espace vectoriel réel de

dimension $N = \frac{n(n+1)}{2}$**. Posons :**

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x \in M} S^2 T_x M$$

L'ensemble $\mathcal{S}^2$ **est constitué des couples** $(x, g(x))$ **où** $x \in M$ **et** $g(x)$ **est une forme bilinéaire symétrique. Il peut être muni d'une structure de variété différentiable de dimension** $n+N$ **pour laquelle la projection canonique** $p : (x, g(x)) \in \mathcal{S}^2 \longmapsto x \in M$ **est de classe** C^∞**. On appelle** ***métrique riemannienne*** **sur** M **toute section de** p **(**$i.e.$ **une application** C^∞**,** $g : M \longrightarrow \mathcal{S}^2$ **vérifiant** $p \circ g =$ **identité de** M**) et telle que, pour tout** $x \in M$**,** $g(x)$ **est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur** $T_x M$**. Cela signifie que pour tout** $x \in M$**,** $g(x)$ **est un produit scalaire sur** $T_x M$ **et que la famille** $\{g(x)\}_{x \in M}$ **est** C^∞ **en** x**.**

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de la variété M **décrite à l'aide d'un atlas** $\mathcal{U} = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$ **; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement** $\{U_i\}$ **est** ***localement fini*** **(*i.e.* tout point**

de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U, φ) un élément de $\mathcal{U}$. Pour la structure différentiable usuelle sur $\mathbf{R}^n$, l'homéomorphisme $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Son application tangente :

$$\Phi : T\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow TU$$

est un difféomorphisme C^∞ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, l'application $\Phi_x : \mathbf{R}^n \longrightarrow T_{\varphi(x)}U$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$; pour tous X_x, $Y_x \in T_{\varphi(x)}U$ on pose :

$$g(x)(X_x, Y_x) = \langle \Phi_x^{-1}(X_x), \Phi_x^{-1}(Y_x) \rangle.$$

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées sur U. En chaque point $x \in U$, les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ forment une base de l'espace tangent T_xU ; soit $(dx_1, \ldots, dx_n)$ sa base duale. Alors g a pour expression :

$$g(x) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{k\ell}(x) dx_k \otimes dx_\ell$$

où les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ définies sur U et telles que la matrice $(g_{k\ell})$ appelée *matrice locale* associée à g soit définie positive.

Notons g_i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $\{\rho_i\}_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, on pose :

$$g(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(x) g_i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur la variété M. Une variété M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *variété riemannienne* ; elle sera notée (M, g). Donnons quelques exemples.

(3.2.1) - *Métrique usuelle sur* R^n

Sur l'espace R^n on a une base de champs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur R^n à l'aide de sa matrice :

$$g_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \textbf{si } k = \ell \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases} \quad \textbf{pour } k, \ell = 1, \ldots, n$$

Cette métrique s'écrit en termes de formes différentielles dx_k : $g = \sum_{k=1}^{n} dx_k \otimes dx_k$.

(3.2.2) - *Graphe d'une fonction*

Soient U un ouvert de R^n et $f : U \longrightarrow \mathrm{R}$ une application C^∞. Alors son graphe $M = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in U \times \mathbf{R} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$ est une variété différentiable de dimension n plongée dans R^{n+1} à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1, \ldots, x_n) \in U \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ forment une base de l'espace tangent $T_x U$. Leurs images par la différentielle $d_x F$ sont les vecteurs de $T_{F(x)} M \subset \mathbf{R}^{n+1}$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Sur R^{n+1} on considère le produit scalaire usuel $\langle \ , \ \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)} M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M. Pour

tout $k = 1, \ldots, n$ **posons** $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$**. Alors**

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \textbf{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \textbf{sinon} \end{cases}$$

D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ **:**

$$g = \sum_{k=1}^{n} (1 + p_k^2) dx_k \otimes dx_k + \sum_{k \neq \ell}^{n} p_k p_\ell dx_k \otimes dx_\ell.$$

(3.2.3) - ***<u>La sphère</u>*** S^2

On note S^2 **la sphère unité de l'espace euclidien** R^3**. Si on ôte le pôle nord**$= (0, 0, 1)$ **et le pôle sud=**$(0, 0, -1)$ **de cette sphère** $\mathbb{S}^2$**, l'ouvert** M **qui reste a pour repésentation paramétrique :**

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \cos\varphi \end{cases}$$

où $\theta \in \mathbf{R}$ **et** $\varphi \in]0, \pi[$**. L'application différentiable** F : $(\theta, \varphi) \in \mathbf{R} \times]0, \pi[\longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ **n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point** (θ, φ) **et est donnée par la matrice :**

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta,\varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$, pris dans R^3, donnent la métrique riemannienne sur M :

$$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

(3.2.4) - ***Le demi-espace*** H^n

On note H^n le demi-espace :

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ x_n > 0\}.$$

Alors $g = \frac{\sum_{k=1}^n dx_k \otimes dx_k}{x_n^2}$ est une métrique riemannienne sur H^n. La variété riemannienne (H^n, g) ainsi obtenue est appelée *espace hyperbolique* de dimension n.

3.3. Le laplacien sur les formes

Désormais dans toute la suite (M,g) sera une variété riemannienne compacte, connexe et orientée à l'aide d'une forme volume v. Soient $x \in M$, $(e_1,\cdots,e_n)$

une base orthonormale de T_xM et $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ sa base duale. Sur l'espace $\Lambda^r T_x^* M$ des r-formes extérieures sur T_xM on considère le produit scalaire qui rend la base $\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n}$ orthonormale. On définit l'opérateur $* : \Lambda^r T_x^* M \longrightarrow \Lambda^{n-r} T_x^* M$ par :

$$*(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*) = \varepsilon(e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-r}}^*)$$

où $(j_1, \cdots, j_{n-r})$ est la suite croissante complémentaire de $(i_1, \cdots, i_r)$ dans $\{1, \cdots, n\}$ et ε la signature de la permutation $\{i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_{n-r}\}$. Il induit une application $C^*(M)$-linéaire $* : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{n-r}(M)$ appelée *opérateur étoile* de Hodge. Il vérifie $** = (-1)^{r(n-r)}$id. Pour toute r-forme $\alpha \in \Omega^r(M)$, la n-forme $\alpha \wedge *\alpha$ est du type fv où f est une fonction positive sur M. Soient maintenant α et β deux r-formes. Alors $\alpha \wedge *\beta$ est une n-forme ; on peut donc l'intégrer sur M. On pose :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta.$$

On définit ainsi un produit scalaire sur $\Omega^r(M)$ et donc une structure préhilbertienne.

Soit $\delta : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r-1}(M)$ l'application définie par $\delta = (-1)^{n(r+1)+1} * d*$. On vérifie facilement que δ est l'adjoit de d pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ *i.e.* pour toute r-forme α et toute $(r+1)$-forme β, on a $\langle d\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle$. En effet $\alpha \wedge *\beta$ et une $(n-1)$-forme et on a :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^r \alpha \wedge d(*\beta) \\ &= d\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *d\beta. \end{aligned}$$

On intègre les deux membres ; la formule de Stokes nous donne alors : $0 = \langle d\alpha, \beta\rangle - \langle \alpha, \delta\beta\rangle$. Ce qui est exactement ce que nous cherchons.

Ceci va nous permettre de définir un deuxième opérateur $\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^r(M)$. Celui-ci sera auto-adjoint *i.e.* vérifie $\langle \Delta\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \Delta\beta\rangle$ pour toutes $\alpha, \beta \in \Omega^r(M)$. On l'appelle *laplacien* sur l'espace des r-formes. Il possède des propriétés remarquables dont nous n'allons pas parler ici ; mais nous en donnerons les conséquences liées à la cohomologie.

Avant de continuer regardons comment s'écrit Δ dans un système de coordonnées locales $(U, x_1, \cdots, x_n)$. Nous nous limiterons au cas des fonctions. Notons (g_{ij})

la matrice locale de la métrique g, $|g|$ son déteminant et (g^{ij}) son inverse. Alors Δ est l'opérateur différentiel:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Par exemple sur R^n muni de sa métrique plate (c'est la métrique usuelle dont on a déjá parlé) $g = \sum_{i=1}^n dx_i^2$ on a $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Un calcul immédiat montre que $\alpha \in \Omega^r(M)$ vérifie $\Delta\alpha = 0$ si, et seulement si, $d\alpha = 0$ et $\delta\alpha = 0$; une forme qui vérifie l'une de ces conditions équivalentes est dite *harmonique*. Une fonction harmonique est donc constante. L'ensemble $\mathcal{H}^r(M)$ des r-formes harmoniques sur M est un espace vectoriel. Pour tout $r \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a le :

3.4. Théorème de Hodge. *L'espace vectoriel $\mathcal{H}^r(M)$ est de dimension finie,* **ImΔ** *est de codimension finie et on a une décomposition orthogonale* **:**

$$\begin{aligned} \Omega^r(M) &= \mathcal{H}^r(M) \oplus \Delta(\Omega^r(M)) \\ &= \mathcal{H}^r(M) \oplus \mathbf{Im}d \oplus \mathbf{Im}\delta. \end{aligned}$$

On peut trouver la démonstration de ce théorème dans beaucoup d'ouvrages. Mais la plus accessible

(par exemple du niveau de la rédaction de cet exposé) se trouve sans aucun doute dans [War].

Conséquences

(3.4.1) - Comme $Z^r(M) =$ Ker$d$ $= ($Im$d^*)^{\perp}$, on en déduit que $Z^r(M) = \mathcal{H}^r(M) \oplus$ Imd et donc l'espace de cohomologie $H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$ s'identifie à $\mathcal{H}^r(M)$.

(3.4.2) - La projection orthogonale $\Omega^r(M) \xrightarrow{T} \mathcal{H}^r(M)$ donnée par le théorème de Hodge (ou simplement elle existe parce que $\mathcal{H}^r(M)$ est un sous-espace de dimension finie de $\Omega^r(M)$ donc complet) induit une application linéaire $P : H^r(M) \longrightarrow \mathcal{H}^r(M) \subset Z^r(M)$ qui n'est rien d'autre que la section P dont on s'est posé la question de l'existence au début du paragraphe 3.

(3.4.3) - Il est facile de voir que si $\alpha \in \Omega^r(M)$ est harmonique, il en est de même pour $*\alpha$ et qu'en fait l'application linéaire $\mathcal{H}^r(M) \xrightarrow{*} \mathcal{H}^{n-r}(M)$ est un isomorphisme unitaire (pour les structures préhilbertiennes induites respectivement par celles des espaces $\Omega^r(M)$ et $\Omega^{n-r}(M)$). Donc les espaces vectoriels de cohomologie $H^r(M)$ et $H^{n-r}(M)$ sont isomorphes ; c'est la *dualité*

de Poincaré.

3.5. Quelques exemples

(3.5.1) - L'opérateur Δ sur le tore T^n (muni de la métrique plate $\sum_{i=1}^n dx_i^2$) a l'expression suivante. Toute r-forme α sur T^n s'écrit :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1 \cdots i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots dx_{i_r}$$

où les $f_{i_1 \cdots i_r}$ sont des fonctions C^∞ sur R^n périodiques (de période 2π par exmple) en chacune des variables x_i. Un calcul facile montre que :

$$\Delta\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (\Delta f_{i_1 \cdots i_r}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

où Δ est le laplacien usuel sur R^n. Ainsi α est harmonique si, et seulement si, chacune des fonctions $f_{i_1 \cdots i_r}$ l'est *i.e.* $f_{i_1 \cdots i_r}$ est constante. L'espace vectoriel $\mathcal{H}^r(M)$ est donc engendré sur R par les r-formes harmoniques $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

(3.5.2) - On prend cette fois-ci l'espace projectif complexe $P^n(\mathrm{C})$. On rappelle qu'un point de $P^n(\mathrm{C})$ est repéré par ses coordonnées homogènes $z = (z_0, \cdots, z_n)$

dans $\mathbf{C}^{n+1}$ définies a un facteur multiplicatif (non nul) près. On note $|z|$ la norme de z *i.e.* le nombre réel positif $\sqrt{|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2}$. Pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on note dz et $d\overline{z}_k$ respectivement les 1-formes $dx + \sqrt{-1}dy$ et $dx - \sqrt{-1}dy$. On considère la 2-forme sur $\mathbf{C}^{n+1}$:

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{|z|^2 \sum_{k=0}^{n} dz_k \wedge d\overline{z}_k - \sum_{k,\ell} z_k \overline{z}_\ell dz_k \wedge d\overline{z}_\ell}{|z|^4}.$$

On voit bien qu'elle est invariante par homothéties, donc elle induit une 2-forme sur $P^n(\mathbf{C})$. On vérifie que cette forme est réelle. D'autre part, un calcul long et un peu pénible montre que, pour tout $\ell \in \{0, 1, \cdots, n\}$, la 2ℓ-forme $\omega^\ell = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (ℓ fois) est harmonique ; elle donne donc une classe de cohomologie non nulle dans $H^{2\ell}(P^n(\mathbf{C}))$. Comme $H^{2\ell}(P^n(\mathbf{C}))$ est isomorphe à $\mathbf{R}$, ω^ℓ en est un générateur.

Références

Elles ne sont pas toutes citées dans le texte mais elles contiennent du matériel en rapport avec le sujet et seront sûrement utiles à ceux qui veulent en savoir plus.

[BDP] BERTIN, J., DEMAILLY, J.P., ILLUSIE, L. & PETERS, C. : *Introduction à la théorie de Hodge.* Panoramas et Synthèses 3, SMF, (1996) 3-111.

[BT] BOTT, R. & TU, L. : *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics 82, Springer (1982).

[Deb] DEBARRE, O. : *Tores et variétés abéliennes complexes.* Cours spécialisés Collection SMF, (1999).

[Dem] DEMAILLY, J.P. : *Complex Analytic and Algebraic Geometry.* On peut trouver le texte sur le site : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html.

[Elk] EL KACIMI ALAOUI, A. : Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications. Compositio Math. 73, (1990) 57-106.

[Fre] FREITAG, E. : *Hilbert Modular Forms.* Springer, (1990).

[God] GODBILLON, C. : *Éléments de topologie algébrique.* Collection Méthodes, Hermann (1971).

[Gol] GOLDBERG, S.I. : *Curvature and Homology*, Dover (1982).

[GH] GRIFFITHS, P. & HARRIS, J. : *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Interscience Publication, (1978).

[GS] GRIFFITHS, P. & SCHMID, W. : Recent Developments in Hodge Theory. In *Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli*, Bombay (1973) 31-127.

[Hir] Hirzebruch, F. : *Topological Methods in Algebraic Topology.* Springer-Verlag, (1966).

[Hod] Hodge, W.D. : *The Theory and Applications of Harmonic Integrals.* Cambridge University Press, New York (1952).

[Jos] Jost, J. : *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Universitext, Springer-Verlag (1998).

[Rha] de Rham, G. : *Variétés différentiables.* Collection Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (Édition 1973).

[War] Warner, F.W. : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag (1983).

[Wei] Weil, A. : *Variétés kählériennes.* Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (1971).

[Wel] Wells, R.O. : *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics 65, Springer-Verlag (1979).

A. El Kacimi Alaoui
LAMATH, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9 (FRANCE)
aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr